PHÂN TÍCH PHI TUYẾN VẬT LIỆU HỆ THANH SỬ DỤNG MÔ HÌNH BIẾN CỨNG ĐẲNG HƯỚNG VÀ BIẾN CỨNG ĐỘNG HỌC

NONLINEAR ANALYSIS OF TRUSS STRUCTURES USING ISOTROPIC HARDENING AND KINEMATIC HARDENING MODELS

Nguyễn Thanh Trương
Trường Đại học Bách khoa, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (HCMUT)

TÓM TẮT

Bài báo trình bày mô hình vật liệu biến cứng đẳng hướng (isotropic hardening) và biến cứng động học (kinematic hardening) được sử dụng để xác định trạng thái của vật liệu trong các kết cấu chịu tải. Từ đó áp dụng phân tích phần tử hữu hạn cho bài toán hệ bốn thanh. Nội dung bài báo mô tả dạng yếu là phi tuyến theo các chuyển vị của phần tử thanh, được tuyến tính hóa để thu được ma trận độ cứng tiếp tuyến bằng phương pháp Newton-Raphson. Mô hình hệ thanh phi tuyến vật liệu được giải với sự trợ giúp của MATLAB sử dụng phương pháp lặp với hệ số tải trọng để tìm gia nghiệm chuyển vị và biến dạng, từ đó xác định được trạng thái của vật liệu tại bước gia tải đó.

Từ khóa: *Biến cứng đẳng hướng; Biến cứng động; Phi tuyến vật liệu; Newton-Raphson.*

ABSTRACT

This paper presents the isotropic and kinematic hardening algorithms for state determination of material in deformed structures. It then applies to solve a truss problem. For finite element formulation, the equilibrium equations are proceed in terms of stresses and use the interpretation of weak form as the principal of virtual displacements to develop the integral form needed for deriving the element equations. The weak form is nonlinear in terms of displacements and must be linearized to get the tangent stiffness matrix for use with the Newton-Raphson method. A truss problem involved the material nonlinearities is solved using the iterative method which is implemented in MATLAB with the load factor to obtain displacements and strains. The material state then can be determined at that incremental loading step.

Keywords: *Isotropic hardening, kinematic hardening, material nonlinearity, Newton-Raphson.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong cơ học kết cấu, có bốn loại phi tuyến tùy theo các quan hệ giữa chuyển vị, biến dạng và ứng suất. Trong đó, kết cấu được gọi là phi tuyến vật liệu khi các phương trình cơ sở thể hiện quan hệ phi tuyến giữa biến dạng và ứng suất.

Bài toán hệ thanh có tính đến yếu tố phi tuyến vật liệu được mô tả trong bài báo này, với giả thuyết các chuyển vị là nhỏ, nên các ảnh hưởng hình học được bỏ qua. Quan hệ giữa biến dạng và ứng suất trong bài toán này là phi tuyến và mối quan hệ này không thể được giả định một cách rõ ràng trong các phương trình phi tuyến. Trong trường hợp này, lực dọc trục là một hàm của biến dạng dọc trục và chuyển vị dọc trục. Thông thường, không thể viết được các phương trình vi phân cơ sở ở dạng hiện theo các biến chuyển vị, mà phải thiết lập các phương trình cân bằng theo ứng suất và sử dụng nguyên lý chuyển vị ảo để suy ra các phương trình phần tử.

Để giải bài toán này, hai giải thuật biến cứng đẳng hướng (isotropic hardening) và biến cứng động (kinematic hardening) được giới thiệu và áp dụng để tìm chuyển vị nút tại các bước gia tải. Từ đó suy ra các giá trị ứng suất và biến dạng để xác định trạng thái của vật liệu bằng cách so sánh với giá trị ứng suất chảy σ_Y của vật liệu.

2. PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH TRẠNG THÁI VẬT LIỆU TRONG KẾT CẤU CHỊU TẢI

Quá trình xác định trạng thái vật liệu của một phần tử với gia trị biến dạng ($\Delta\epsilon$), các thông số vật liệu (E, H và σ_Y), trạng thái trước đó của phần tử (biến dạng ϵ, ứng suất σ, trạng thái chảy dẻo, và biến dạng dẻo tích lũy ϵ^p. Mục đích để tính được trạng thái mới của phần tử thanh khi biến dạng dọc trục tăng lên một lượng $\Delta\epsilon$. Các bước tính toán được thực hiện như sau:

a) Tính ứng suất chảy hiện tại, phụ thuộc vào biến dạng dẻo tích lũy, ϵ^p và mô đun dẻo, H:

$$\bar{\sigma}_Y=\sigma_Y+H\epsilon^p$$

Trong đó: σ_Y là ứng suất chảy ban đầu.

b) Giả sử ứng xử của vật liệu vẫn còn đàn hồi trong gia trị biến dạng hiện tại, tính gia trị ứng suất và ứng suất mới:

$$\Delta s=E\Delta\epsilon; \quad s=\sigma+\Delta s$$

c) Để kiểm tra trạng thái đúng của vật liệu ở bước này, ta phải phân theo hai hướng trạng thái: Phần tử vẫn còn đàn hồi trước đó hoặc phần tử đã dẻo trước đó. Hai giải thuật logic ở phần sau sẽ mô tả hai hướng phân tích này.

3. GIẢI THUẬT XÁC ĐỊNH TRẠNG THÁI VẬT LIỆU CỦA PHẦN TỬ

3.1. Mô hình biến cứng đẳng hướng (Isotropic Hardening)

Tham số đầu vào: Gia trị biến dạng $\Delta\epsilon$; cơ tính vật liệu E, σ_Y, H, trạng thái trước vật liệu (elastic hoặc yielded); ứng suất (σ) and biến dạng dẻo tích lũy ϵ^p.

1. Tính toán:

$$\Delta s=E\Delta\epsilon; \quad s=\sigma+\Delta s; \quad \bar{\sigma}_Y=\sigma_Y+H\epsilon^p$$

2. If status = elastic, perform the following calculations; otherwise, go to the next step.

If $|s|<\bar{\sigma}_Y$, then [element is still elastic] new σ=s and exit.

Else [element yieled in this increment] status = yielded, $\beta=(\bar{\sigma}_Y-|\sigma|)/(|s|-|\sigma|)$
End if. [Go to step 4].

3. If status = yielded,

If $\sigma\Delta s<0$ then [element is unloading/reloading]

status = elastic, new σ=s and exit.

Else [element is continuing to yield]
$\beta=0$;
End if

4. Compute

new $\boldsymbol{\sigma}=\sigma+\beta\Delta s+\frac{EH}{E+H}(1-\beta)\Delta\epsilon$

new $\epsilon^p=\epsilon^p+\frac{1-\beta}{1+H/E}|\Delta\epsilon|$

3.2. Mô hình biến cứng động (Kinematic Hardening)

Các bước xác định trạng thái ở mô hình này cũng tương tự như mô hình biến cứng đẳng hướng, chỉ khác là các ứng suất chảy trong trường hợp phần tử chịu kéo và nén luôn là hằng số và bằng $2\sigma_Y$, và không lấy trị tuyệt đối của biến dạng dẻo tích lũy $\Delta\epsilon$.

Tham số đầu vào: Gía trị biến dạng $\Delta\epsilon$; cơ tính vật liệu E, σ_Y, H, trạng thái trước vật liệu (elastic hoặc yielded); Ứng suất (σ) and biến dạng dẻo tích lũy ϵ^p.

1. Tính toán:

$\Delta s=E\Delta\epsilon$; $s=\sigma+\Delta s$; $\alpha=H\epsilon^p$

2. If status = elastic, perform the following calculations; otherwise, go to the next step.

If $|s-\alpha|\le\sigma_Y$, then [element is still elastic]

new σ=s and exit.
Else [element yieled in this increment]

status = yielded, $\beta=\frac{\sigma_Y-|\sigma-\alpha|}{|s|-|\sigma-\alpha|}$
End if. [Go to step 4].

3. If status = yielded,

If $\sigma\Delta s<0$ then [element is unloading/reloading]

status = elastic, new σ=s and exit.

Else [element is continuing to yield]
$\beta=0$;
End if

4. Compute

new $\sigma=\sigma+\beta\Delta s+\frac{EH}{E+H}(1-\beta)\Delta\epsilon$

new $\epsilon^p=\epsilon^p+\frac{1-\beta}{1+H/E}|\Delta\epsilon|$

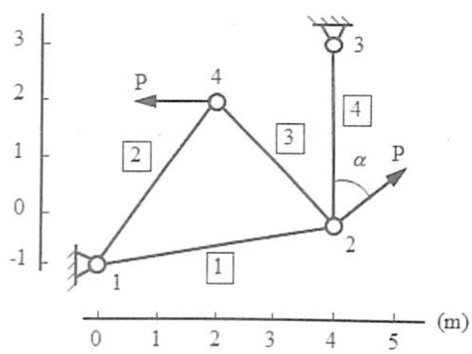
4. VÍ DỤ SỐ: HỆ BỐN THANH

Xét hệ gồm bốn thanh nối với nhau bằng khớp cầu như Hình 1. Giả sử E=200 GPa, H=10MPa, σ_Y=150 MPa. Với các phần tử 1 và 2, giả sử biến cứng động của vật liệu với tiết diện $A_1=0.0004\ m^2$. Các phần tử còn lại sử dụng mô hình vật liệu biến cứng đẳng hướng với tiết diện $A_2=0.0002\ m^2$. Tải trọng P=40 kN và tác dụng tại một góc $\alpha=60^0$ ở nút 2. Xác định độ võng vĩnh viễn sau khi tải trọng ☞

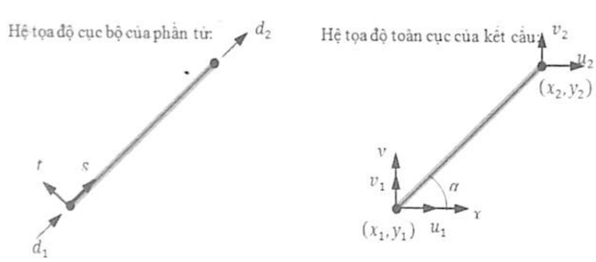
được gỡ bỏ (các chuyển vị được tính theo mm và ứng suất theo MPa).

Tải nút:

Nút	Bậc tự do	Giá trị
2	Δu_2	34641
	Δv_2	20000
4	Δu_4	-40000
	Δv_4	0



Hình 1. Hệ bốn thanh



Hình 2. Hệ tọa độ cục bộ và toàn cục của thanh chịu tải dọc trục

4.1. Giới thiệu phần tử

Theo Hình 2, trong hệ tọa độ cục bộ: Véc tơ chuyển vị $d_1 = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$; Véc tơ nội lực $r_{I1} = \begin{Bmatrix} -F \\ F \end{Bmatrix}$

Trong hệ tọa độ toàn cục: Véc tơ chuyển vị nút $d = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$; Véc tơ nội lực $r_I = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix}$

Chuyển đổi giữa véc tơ chuyển vị toàn cục sang cục bộ và ngược lại như sau:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_x & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow d_1 = Td$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & 0 \\ m_x & 0 \\ 0 & l_x \\ 0 & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow d = T^T d_1$$

Trong đó, l_x và m_x lần lượt là là cosine của góc giữa trục phần tử với trục x và trục y của hệ tọa độ toàn cục. Chiều dài phần tử và các phương cosine có thể được xác định như sau:

$$l_x = \cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{L};$$

$$m_x = \sin\alpha = \frac{y_2 - y_1}{L};$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Với ma trận chuyển đổi T, phương trình cân bằng phần tử trong hệ tọa độ cục bộ tương quan với hệ tọa độ toàn cục như sau:

$$k_{T1}\Delta d_1 = -r_{I1} \Rightarrow k_{T1}T\Delta d = -r_{I1}$$

Nhân hai vế cho T^T, ta được:

$$T^T k_{T1}\Delta d_1 = -T^T r_{I1}$$

Lưu ý $T^T r_{I1}$ ở đây là chuyển đổi của ngoại lực tác dụng từ hệ trục cục bộ sang toàn cục, ta có các phương trình phần tử theo các bậc tự do và tải nút trong các phương toàn cục như sau:

$$k_T \Delta d = -r_I$$

Các phương trình cân bằng phần tử

được lắp ghép vào hệ phương trình cân bằng kết cấu theo cách thông thường của phương pháp PTHH. Sau khi thu được gia nghiệm chuyển vị tại nút từ nghiệm của hệ phương trình toàn cục, cho mỗi phần tử, gia nghiệm biến dạng có thể được tính bằng cách biến đổi các chuyển vị nút về hệ tọa độ cục bộ và sử dụng phương trình biến dạng – chuyển vị, $\Delta\epsilon_x = B^T \Delta d$. Trình tự xác định trạng thái của kết cấu cũng được thực hiện như đối với phần tử biến dạng dọc trục.

4.2. Giải nghiệm PTHH

Hệ số tải trọng = 1: Thiết lập trạng thái tất cả phần tử về giá trị ban đầu và bắt đầu gia tải. Bài báo trình bày kết quả tính toán bắt đầu từ bước lặp 2, do nghiệm chưa hội tụ tại bước lặp 1.

Sau bước lặp 1, ta được véc tơ nội lực và ngoại lực toàn cục như sau:

$$R_I = \begin{Bmatrix} 5358.98 \\ 21339.7 \\ 31986.9 \\ 11854.3 \\ 0 \\ -30540 \\ -37345.9 \\ -2654.09 \end{Bmatrix}; \quad R_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 34641 \\ 20000 \\ 0 \\ 0 \\ -40000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tương ứng với các bậc tự do không bị ràng buộc:

$$R_I = \begin{Bmatrix} 31986.9 \\ 11854.3 \\ -37345.9 \\ -2654.09 \end{Bmatrix}; \quad R_E = \begin{Bmatrix} 34641 \\ 20000 \\ -40000 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad R = R_E - R_I = \begin{Bmatrix} 2654.09 \\ 8145.67 \\ -2654.09 \\ 2654.09 \end{Bmatrix}$$

$\|R_E\| = 56568.5$; $\|R\| = 9353.31$

Tham số hội tụ =0.0273389

Bước lặp 2:

$$\begin{bmatrix} 18598.2 & 4228.66 & -336.72 & 336.72 \\ 4228.66 & 2112.98 & 336.72 & -336.72 \\ -336.72 & 336.72 & 7163.8 & 9903.9 \\ 336.72 & -336.72 & 9903.9 & 15697.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta u_4 \\ \Delta v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2654.09 \\ 8145.67 \\ -2654.09 \\ 2654.09 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình toàn cục, ta được:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_2 = -4.2524, \Delta v_2 = 17.0096, \\ \Delta u_4 = -17.4866, \Delta v_4 = 11.6577 \end{Bmatrix}$$

Các gia trị tổng cho bước tải trọng này:

	Δu	Δv
1	0	0
2	−4.44482	20.1101
3	0	0
4	−22.4362	13.3951

Giải thuật nghiệm cho phần tử 1:

Trạng thái mới của phần tử:
ϵ=0.000137106; σ=27.4213;
➔ Trạng thái = đàn hồi
Lực dọc trục =10968.5;
Trong hệ trục cục bộ:

$$r_{I1} = \{-10968.5,\ 10968.5\}$$
$$r_I = T^T r_{I1} = \{-10641 \quad -2660.25 \quad 10641 \quad 2660.25\}$$

- **Giải thuật nghiệm cho phần tử 2:**

Trạng thái mới của phần tử:
ϵ=0.000361; σ=-72.111;
➔ Trạng thái = đàn hồi;
Lực dọc trục =-28844.4;
Trong hệ trục cục bộ:

$$r_{I1} = \{28844.4, -28844.4\}$$
$$r_I = T^T r_{I1} = \{16000 \quad 24000 \quad -16000 \quad -24000\}$$

- **Giải thuật nghiệm cho phần tử 3:**

Trạng thái mới của phần tử:
ϵ=0.00281909; σ=169.706;
➔ Trạng thái = chảy dẻo
Lực dọc trục =33941.1;
Trong hệ trục cục bộ:

$$r_{I1} = \{-33941.1, 33941.1\}$$
$$r_I = T^T r_{I1} = \{24000 \quad -24000 \quad -24000 \quad 24000\}$$

- **Giải thuật nghiệm cho phần tử 4:**

Trạng thái mới của phần tử:

ϵ=0.00670337; σ=-206.699;

➔ Trạng thái = chảy dẻo.

Lực dọc trục =-41339.7.

Trong hệ trục cục bộ:

$$r_{I1} = \{41339.7, -41339.7\}$$

$$r_I = T^T r_{I1} = \{0 \quad 41339.7 \quad 0 \quad -41339.7\}$$

Sau khi lắp ghép các véc tơ nội lực phần tử, ta được véc tơ nội lực và ngoại lực toàn cục như sau:

$$R_I = \begin{Bmatrix} 5358.98 \\ 21339.7 \\ 34641 \\ 20000 \\ 0 \\ -41339.7 \\ -40000 \\ 3.63798\times10^{-12} \end{Bmatrix}; R_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 34641 \\ 20000 \\ 0 \\ 0 \\ -40000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tương ứng với các bậc tự do không bị ràng buộc:

$$R_I = \begin{Bmatrix} 34641 \\ 20000 \\ -40000 \\ 3.63798\times10^{-12} \end{Bmatrix}; R_E = \begin{Bmatrix} 34641 \\ 20000 \\ -40000 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$R = R_E - R_I = \begin{Bmatrix} -7.27596\times10^{-12} \\ -3.63798\times10^{-12} \\ -3.63798\times10^{-11} \\ -3.63798\times10^{-12} \end{Bmatrix}$$

$\|R_E\| = 56568.5;$

$\|R\| = 3.74553 - 3.63798\times10^{-11};$

Tham số hội tụ =0.

Nghiệm số đã hội tụ đến dung sai mong muốn.

Hệ số tải trọng = 0. Gỡ bỏ tải và thiết lập trạng thái tất cả phần tử về giá trị của chúng ở vòng lặp trước đó.

Bước lặp 1:

$$\begin{bmatrix} 18598.2 & 4228.7 & -336.7 & 336.7 \\ -4228.7 & 2113 & 336.7 & -336.7 \\ -336.7 & 336.7 & 7163.8 & 9903.9 \\ 336.7 & -336.7 & 9903.9 & 15697.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta u_4 \\ \Delta v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -34641 \\ -20000 \\ 40000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình toàn cục, ta được: $\{\Delta_{u2}$=15.6948,Δ_{v2}=-65.1101,Δ_{u4}=92.1862, Δ_{v4}=-59.8951}

Các gia trị tổng cho bước tải trọng này:

	Δu	Δv
1	0	0
2	15.6948	−65.1101
3	0	0
4	92.1862	−59.8951

Chuyển vị nút kết cấu:

	u	v
1	0	0
2	11.25	−45
3	0	0
4	69.75	−46.5

Sau khi lắp ghép các véc tơ nội lực phần tử, ta được véc tơ nội lực và ngoại lực toàn cục như sau:

$$R_I = \begin{Bmatrix} 1.39257\times10^{-12} \\ 6.2404\times10^{-11} \\ -480000 \\ -346795 \\ 0 \\ 826795 \\ 480000 \\ -480000 \end{Bmatrix}; \quad R_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tương ứng với các bậc tự do không bị ràng buộc:

$$R_I = \begin{Bmatrix} -480000 \\ -346795 \\ 480000 \\ -480000 \end{Bmatrix}; \quad R_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$R = R_E - R_I = \begin{Bmatrix} 480000 \\ 346795 \\ -480000 \\ 480000 \end{Bmatrix}$$

$\|R_E\| = 0; \quad \|R\| = 900814$

Tham số hội tụ =8.11467×10^{-11}

Bước lặp 2:

$$\begin{bmatrix} 25332.6 & -2505.7 & -7071.1 & 7071.1 \\ -2505.7 & 21545.7 & 7071.1 & -7071.1 \\ -7071.1 & 7071.1 & 13898.1 & 3169.6 \\ 7071.1 & -7071.1 & 3169.6 & 22432 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \Delta u_4 \\ \Delta v_4 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 480000 \\ 346795 \\ -480000 \\ 480000 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình toàn cục, ta được:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_2 = -15.5024, \Delta v_2 = 62.0096, \\ \Delta u_4 = -87.2366, \Delta v_4 = 58.1577 \end{Bmatrix}$$

Các gia trị tổng cho bước tải trọng này:

	Δu	Δv
1	0	0
2	0.192418	−3.10048
3	0	0
4	4.94965	−1.73736

Chuyển vị nút kết cấu:

	u	v
1	0	0
2	−4.2524	17.0096
3	0	0
4	−17.4866	11.6577

$\|R\_E\|=0$; $\|R\|=2.6315\times10^{-10}$

Tham số hội tụ =0.

Như vậy, nghiệm số đã hội tụ đến dung sai mong muốn. Sau khi tải được gỡ bỏ, các phần tử thanh trong hệ ở trạng thái ứng suất tự do như khi ở trạng thái tĩnh định. Tuy nhiên, kết cấu xuất hiện một số chuyển vị vĩnh viễn tại các khớp do trạng thái vật liệu đã sang vùng chảy dẻo.

5. KẾT LUẬN

Bài toán hệ bốn thanh có kể đến yếu tố phi tuyến vật liệu đã được giải trong bài báo này. Dạng tổng quát của các phương trình tiếp tuyến phần tử hữu hạn cũng tương tự như của các phần tử đàn hồi tuyến tính. Chỉ có một điểm khác là ta sẽ cần xét đến quan hệ đàn-dẻo gia tăng của ứng suất và biến dạng. Các thành phần cơ bản cần để thiết lập quan hệ này là các dạng giới hạn chảy với các quy luật biến cứng kèm theo, trong đó sử dụng tiêu chuẩn chảy von-Mises và các mô hình biến cứng liên kết suy rộng trực tiếp cho bài toán một chiều. Nghiệm số hội tụ thu được thể hiện trạng thái vật liệu của phần tử thanh. Kết quả của bài báo này là bước nghiên cứu ban đầu, có ý nghĩa trong việc dự đoán ứng xử của kết cấu có kể đến yếu tố phi tuyến của vật liệu, vốn tương đối phức tạp trong việc xây dựng mô hình phần tự hữu hạn. Hướng phát triển tiếp theo là xây dựng mô hình kiểm chứng trên phần mềm của hãng thứ ba và phát triển cho phần tử dầm.❖

Ngày nhận bài: **09/7/2018**
Ngày phản biện: **17/7/2018**

Tài liệu tham khảo:

[1]. Belytschko, T., Liu, W. K., and Moran, B., Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, Wiley, New York, (2000).

[2]. Crisfield, M. A., Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1, Essentials, Wiley, New York, (1991).

[3]. Crisfield, M. A., Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 2, Advanced Topics, Wiley, New York, (1997).

[4]. Kwon, Y. W. and Bang, H., The Finite Element Method Using Matlab, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, (2000).