

# PHÂN TÍCH UỐN TĨNH CỦA VỎ FGM HAI ĐỘ CONG CÓ LỖ RỖNG VI MÔ BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

STATIC BENDING ANALYSIS OF DOUBLE CURVATURE SHELL FGM WITH MICRO HOLES USING FINITE ELEMENT METHOD

Lương Thành Tựu, TS. Lưu Tuấn Anh

Khoa Kỹ thuật cơ sở, Trường sỹ quan Kỹ thuật Quân sự

## TÓM TẮT

*Bài báo trình bày kết quả phân tích tĩnh của vỏ hai độ cong khi chịu uốn bằng phương pháp phần tử hữu hạn, độ cong của vỏ được thể hiện trong các ma trận phần tử thông qua các bán kính cong theo các phương. Vỏ được làm bằng vật liệu FGM có xét đến lỗ rỗng vi mô và trường chuyển vị thỏa mãn lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Độ tin cậy của kết quả nghiên cứu được khẳng định qua việc so sánh với các kết quả đã công bố. Bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số yếu tố như vật liệu, đặc trưng hình học của vỏ đến đáp ứng uốn tĩnh của vỏ.*

**Từ khóa:** FGM; Vỏ hai độ cong; Lỗ rỗng vi mô; Uốn tĩnh.

## ABSTRACT

*This paper presents the static bending analysis of double curvature shell based on finite element method (FEM). The curvature of the shell is presented in the element matrix through the radius of curvature in some directions. The shell is made from functionally graded material (FGM) in considering the micro holes, and the displacement field is satisfied the first order shear deformation theory. The numerical results are verified by comparing with other published papers. Effects of some parameters such as material properties, geometrical properties, etc., on the static bending of the shell are investigated.*

**Từ khóa:** FGM, double curved shell, pronuos, static bending.

1. MỞ ĐẦU

Các kết cấu dạng vỏ thường được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật, như để làm các mái vòm, bể chứa, ống dẫn,... đặc biệt có thể làm vỏ ô tô, máy bay. Ngày nay, với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, vật liệu, kết cấu vỏ được làm bằng nhiều loại vật liệu khác nhau thay thế cho vật liệu đồng chất, chẳng hướng truyền thống, như vật liệu composite, vật liệu FGM (Functionally Graded Materials). Vật liệu FGM là loại vật liệu được chế tạo bằng cách pha trộn hai thành phần, bao gồm kim loại (metal) và gốm (ceramic) theo một tỷ lệ nhất định phân bố theo chiều dày của vỏ, nhờ đó tính chất cơ học của vật liệu biến thiên liên tục từ mặt này đến mặt kia, khắc phục được các nhược điểm của vật liệu thông thường, vật liệu composite như khả năng chịu nhiệt, chống bong tách lớp. Tuy nhiên, khi chế tạo loại vật liệu này, do sự chênh lệch nhiệt độ của các pha vật liệu thành phần nên xuất hiện các lỗ rỗng vi mô ảnh hưởng đến cơ tính của vật liệu so với vật liệu được coi là liên tục. Nhiều nghiên cứu về vật liệu FGM đã bỏ qua sự ảnh hưởng của các lỗ rỗng vi mô này, vật liệu FGM được coi là liên tục, điều này chưa xét các yếu tố thực tế mà sự hạn chế của công nghệ mang lại và trong một chừng mực nào đó có thể chấp nhận được. Trong bài báo này, vật liệu FGM được nghiên cứu với các lỗ rỗng trong nó có thể tích được giả định phân chia đều cho cả hai pha gốm và kim loại, sự ảnh hưởng của các lỗ rỗng này thông qua một hệ số tỷ lệ lỗ rỗng, vật liệu vẫn được coi là liên tục, các ứng xử cơ học của nó là tuyến tính và tuân theo định luật Hooke. Các tác giả sử dụng phương pháp PTHH để phân tích bài toán uốn tĩnh của vỏ.

2. CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN

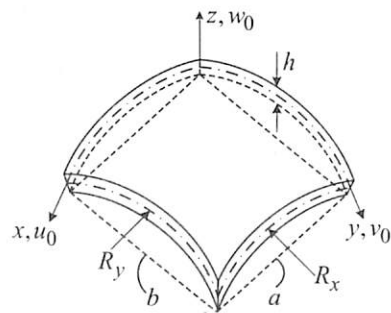
2.1. Vỏ hai độ cong làm bằng vật liệu FGM có lỗ rỗng vi mô

Xét vỏ hai độ cong như trên Hình 1. Vỏ có chiều dày không đổi  $h$ , bán kính cong theo hai phương  $x, y$  lần lượt là  $R_x, R_y$  hình chiếu của vỏ trên mặt phẳng  $xy$  là hình chữ nhật kích thước  $a, b$ .

Vỏ được làm bằng vật liệu cơ tính biến thiên gồm hai thành phần gốm và kim loại, sự phân bố tỷ lệ thành phần của hai vật liệu này tuân theo quy luật của hàm số mũ như công thức [5]:

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^k, V_m = 1 - V_c \tag{1}$$

Trong đó,  $V_c, V_m$  tương ứng là tỷ lệ thể tích của gốm và kim loại;  $z$  là tọa độ theo phương chiều dày vỏ;  $h$  là chiều dày vỏ;  $k$  là hệ số mũ thể tích;  $c, m$  tương ứng là chỉ số ký hiệu cho gốm và kim loại.



Hình 1. Vỏ hai độ cong làm bằng vật liệu FGM.

Trong trường hợp chưa kể đến sự xuất hiện của các lỗ rỗng vi mô bên trong vật liệu, mô đun đàn hồi Young ( $E$ ) và hệ số Poatxong ( $\nu$ ) của vật liệu FGM phụ thuộc vào tỷ lệ thành phần vật liệu theo biểu thức [5]:

$$\begin{cases} E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m \\ \nu(z) = (\nu_c - \nu_m)V_c + \nu_m \end{cases} \tag{2}$$

Khi có kể đến các lỗ rỗng vi mô, giả sử hệ số

tỷ lệ lỗ rỗng vi mô là các đặc trưng cơ tính của vật liệu lúc này phụ thuộc cả vào tỷ lệ thể tích vật liệu và hệ số lỗ rỗng như sau, [3]:

$$\begin{cases} E(z) = E_c \left( V_c - \frac{\alpha}{h} \right) + E_m \left( V_m - \frac{\alpha}{h} \right) \\ v(z) = v_c \left( V_c - \frac{\alpha}{h} \right) + v_m \left( V_m - \frac{\alpha}{h} \right) \end{cases} \quad (3)$$

Sau khi biến đổi, biểu thức (3) được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m - \frac{\alpha}{2}(E_c + E_m) \\ v(z) = (v_c - v_m)V_c + v_m - \frac{\alpha}{2}(v_c + v_m) \end{cases} \quad (4)$$

## 2.2. Công thức phần tử hữu hạn tính toán vỏ hai độ cong có lỗ rỗng vi mô chịu tác dụng của tải trọng tĩnh

Trường chuyển vị trong vỏ tại điểm có tọa độ (x,y,z) được biểu diễn dưới dạng [1]:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

Trong đó,  $u_0, v_0, w_0$  là các thành phần chuyển vị của điểm trên mặt trung bình của vỏ,  $\theta_x, \theta_y$  là các góc xoay của pháp tuyến mặt trung bình quanh trục y, x.

Sử dụng phần tử đẳng tham số 8 nút, mỗi nút có 5 bậc tự do, chuyển vị tại một điểm bất kỳ trong phần tử vỏ được xác định bởi [2]:

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s)u_{0i}, v_0 = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s)v_{0i}, w = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s)w_i \\ \theta_x = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s)\theta_{xi}, \theta_y = \sum_{i=1}^8 N_i(r,s)\theta_{yi} \end{cases} \quad (6)$$

Trong đó,  $N_i(r,s)$  là các hàm dạng tương ứng của phần tử 8 nút.

Thế năng của phần tử vỏ khi kể đến ngoại lực tác dụng có dạng [2]:

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int_{V_e} \hat{a}_i^T D_u \hat{a}_i dV + \frac{1}{2} \int_{V_e} \frac{5}{6} \hat{a}_c^T D_c \hat{a}_c dV - \int_{V_e} u_c^T f_c dV = \\ &= \frac{1}{2} q_e^T \left( \int_{V_e} B_u^T D_u B_u dV + \frac{5}{6} \int_{V_e} B_c^T D_c B_c dV \right) q_e - q_e^T \int_{V_e} [N]^T f_c dV \end{aligned} \quad (7)$$

Cực tiểu thế năng, ta thu được phương trình cân bằng tĩnh của phần tử vỏ chịu tác dụng của tải trọng tĩnh như sau:

$$K_e q_e = F_e \quad (8)$$

Trong đó, ma trận độ cứng phần tử và véc tơ tải trọng nút phần tử được xác định như sau:

$$\begin{cases} K_e = \int_{V_e} B_u^T D_u B_u dV + \frac{5}{6} \int_{V_e} B_c^T D_c B_c dV \\ F_e = \int_{V_e} [N]^T f_c dV \end{cases} \quad (9)$$

Sau khi ghép nối ma trận và khử điều kiện biên, ta thu được phương trình cân bằng tĩnh của vỏ.

$$Kq = F \quad (10)$$

Giải phương trình (10) thu được chuyển vị tại các điểm nút, từ đó xác định được trường chuyển vị, ứng suất, nội lực của điểm bất kỳ trong vỏ.

## 3. KHẢO SÁT SỐ

### 3.1. Kiểm tra độ tin cậy của chương trình tính

Xét vỏ cầu ( $R = R_x = R_y = \infty$ ) làm bằng vật liệu Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> có các thông số vật liệu như trong tài liệu [6], liên kết tựa đơn trên 4 cạnh (SSSS), chịu tác dụng của lực phân bố hình sin trên toàn bộ bề mặt với cường độ lớn nhất tại bề mặt. Kết quả chuyển vị không

thứ nguyên  $\bar{w} = 10w_0 E_2 h^3 / (q_0 a^4)$  và ứng suất

$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{h\sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)}{q_0}$  (với  $\sigma_{xx}(a/2, b/2, h/2)$  và là chuyển vị và ứng suất pháp tại điểm chính giữa vỏ theo phương lực  $q_0$ ) được so sánh với kết quả trong tài liệu [10] như bảng dưới đây:

$(\bar{w}, \bar{\sigma}_{xx})$	Kết quả	n=0	n=1	n=2	n=5	n=10
$\bar{w}$	[6]	2.9603	5.8891	7.5733	9.1184	10.0892
	Tác giả	2.9605	5.8895	7.5730	9.1135	10.0870
$\bar{\sigma}_{xx}$	[6]	19.9550	30.8700	36.0936	42.4883	50.8901
	Tác giả	19.9432	30.8500	36.0669	42.4470	50.8488

Nhận xét:

Các kết quả so sánh chuyển vị không thứ nguyên của tác giả so với tài liệu [10] rất gần nhau, điều đó chứng tỏ chương trình tính tác giả đã lập đảm bảo độ tin cậy.

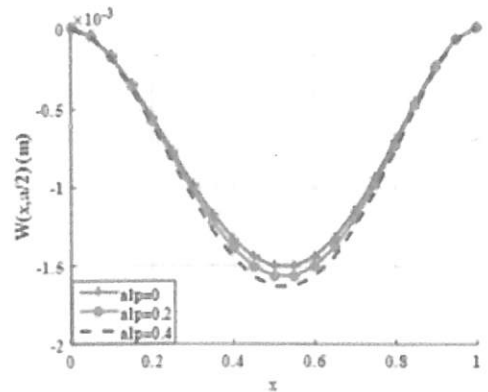
**3.2. Phân tích uốn tĩnh của vỏ FGM 2 độ cong có lỗ rỗng tế vi**

Xét vỏ FGM hai độ cong có các thông số vật liệu và kết cấu như sau:

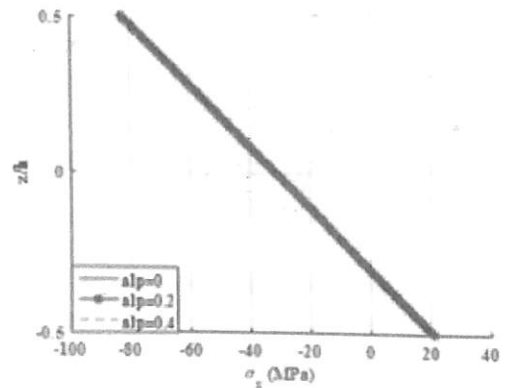
$a=b=1, h=a/100; R = R_x = R_y = 10a$

$E_c = 300GPa, E_m = 200GPa, \nu_c = \nu_m = 0.3$ ; chỉ số mũ  $k = 1$ ; thể tích lỗ rỗng tế vi:  $\alpha$  (trong đồ thị ký hiệu là  $\alpha p$ ) chịu liên kết ngàm 4 cạnh (CCCC) dưới tác dụng của lực phân bố đều với cường độ  $q_0 = 10^5 (N/m^2)$  trên bề mặt vỏ. Kết quả điểm chuyển vị của đường giữa vỏ  $W(x, a/2)$  và  $\sigma_x$  ứng suất pháp tại mặt cắt điểm giữa tấm

như trong Hình 2. Gọi  $W^* = \frac{\min(w).10^3.E_m.h^3}{P_0.a^4}$  là chuyển vị không thứ nguyên lớn nhất của tấm.



a) Đường chuyển vị



b) Ứng suất pháp tuyến

Hình 2. Chuyển vị không thứ nguyên và ứng suất pháp tuyến.

Nhận xét: Từ các đồ thị trên ta thấy, ảnh hưởng của lỗ rỗng tế vi đến đáp ứng của vỏ. Khi tăng tỷ lệ  $\alpha$ , chuyển vị và ứng suất tăng vì

khi tăng  $\alpha$  sẽ làm cho cơ tính của tấm thay đổi, cụ thể mô đun đàn hồi E và hệ số Poát xông v của tấm giảm.

#### 4. KẾT LUẬN

Dựa trên phương pháp PTHH, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, tác giả đã xây dựng các quan hệ ứng xử trong vỏ FGM và các ma trận phần tử khi có xét đến hai độ cong của vỏ và các lỗ rỗng vi mô trong vỏ.

Xây dựng thuật toán và chương trình tính xác định đáp ứng tĩnh của vỏ FGM hai độ cong khi chịu tác dụng của lực phân bố đều trên bề mặt vỏ. Thuật toán và chương trình đã được kiểm tra độ tin cậy thông qua việc so sánh kết quả tính của tác giả với kết quả tính của Reddy. Đã khảo sát được sự ảnh hưởng của nhiều yếu tố đến đáp ứng tĩnh của vỏ, qua đó đưa ra những nhận xét định lượng trên mô hình đã cho. Các nhận xét có ý nghĩa trong việc tính toán các kết cấu tương tự.

Có thể phát triển bài toán sang phân tích dao động riêng, dao động cưỡng bức, ổn định cho kết cấu vỏ hai độ cong làm bằng vật liệu FGM. ❖

Ngày nhận bài: **10/6/2019**

Ngày phản biện: **18/6/2019**

#### Tài liệu tham khảo:

- [1]. Đào Huy Bích; *Lý thuyết đàn hồi, dẻo, từ biến*, NXB. Đại học Quốc gia Hà Nội (2000).
- [2]. Chu Quốc Thắng; *Phương pháp phần tử hữu hạn*, NXB. Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội (1997).
- [3]. S. Pradyumna and J.N. Bandyopadhyay. *Free vibration analysis of functionally graded curved panels using a higher-order finite element formulation*. Journal of Sound and Vibration, (2008), pp 176-192.
- [4]. Tran Thi Thom, Nguyen Dinh Kien and Nguyen Duc Hieu. *Fundamental frequency analysis of functionally graded porous beams in thermal environment using different higher-order beam theories*. Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc “Vật liệu và Kết cấu Composite: Cơ học, công nghệ và ứng dụng”, Nha trang, (7, 2016), tr.667-674.
- [5]. S. Rohit, P.R. Maiti. *Buckling of simply supported FGM plates under uniaxial load*. International Journal of Civil and Structural Engineering, 2, (4), (2012), pp. 1035-1050.
- [6]. S.M. Kazerouni, A.R. Saidi, M. Mohammadi. *Buckling analysis of thin functionally graded rectangular plates with two opposite edges simply supported*. International Journal of Engineering Transactions B (Applications), 23, (2), (2010), pp. 179-192.
- [7]. R. Javaheri, M.R. Eslami. *Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 82, (2002), pp. 277-283.
- [8]. S. Shariat, M.R. Eslami. *Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads*. Composite Structures, 78, (2007), pp. 433-439.
- [9]. T.L. Wu, K.K. Shukla, J.H. Huang. *Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates*. Composite Structures, 81, (2007), pp. 1-10.
- [10]. Ameer M, Tounsi A, Mechab I, Bedia EA. *A new trigonometric shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates resting on elastic foundations*. KSCE J Civil Eng 2011;15:1405-14.