

Xây dựng thuật toán phát mẫu ngẫu nhiên theo phân phối Birnbaum-Saunders ba tham số và ứng dụng trong mô phỏng chiều dày bê tông phun

Developing a random sampling algorithm for the Three-parameter Birnbaum-Saunders distribution and its application in simulating shotcrete thickness

> **THS PHẠM THANH TÙNG, PGS.TS BÙI ĐỨC NẮNG*, TS TRẦN ANH BẢO**

Viện Kỹ thuật công trình đặc biệt, Đại học Kỹ thuật Lê Quý Đôn

*Email: ducnangbui@lqdtu.edu.vn

TÓM TẮT

Mô phỏng số Monte Carlo là một công cụ quan trọng trong phân tích độ tin cậy kết cấu, trong đó việc mô hình hóa chính xác các biến ngẫu nhiên đầu vào đóng vai trò quyết định. Đối với những đại lượng thực tế có miền giá trị dương và tồn tại ngưỡng tối thiểu, phân phối Birnbaum-Saunders ba tham số (BS(3P)) tỏ ra đặc biệt phù hợp. Tuy nhiên, hiện nay vẫn còn thiếu các thuật toán phát mẫu ngẫu nhiên dành riêng cho phân phối này, gây hạn chế trong các nghiên cứu ứng dụng. Bài báo này trình bày việc xây dựng một thuật toán phát biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối BS(3P) dựa trên thuật toán phát mẫu của phân phối BS hai tham số đã có sẵn. Thuật toán được phát triển theo phương pháp biến đổi ngược và được kiểm chứng thông qua một bài toán thực tế: mô phỏng chiều dày bê tông phun trong kết cấu chống đỡ ban đầu của đường hầm. Dữ liệu thực nghiệm gồm 1.546 giá trị đo đạc cho thấy phân phối BS(3P) là mô hình phù hợp nhất. Kết quả mô phỏng với các cỡ mẫu khác nhau chứng minh thuật toán đề xuất có độ chính xác cao, sai số giảm dần theo cỡ mẫu và có khả năng hội tụ tốt về các tham số và đặc trưng thống kê lý thuyết, đáp ứng yêu cầu cho các bài toán phân tích độ tin cậy bằng mô phỏng Monte Carlo.

Từ khóa: Birnbaum-Saunders ba tham số; chiều dày bê tông phun; mô phỏng Monte Carlo; tạo số ngẫu nhiên; tuổi thọ mỏi.

ABSTRACT

Monte Carlo simulation is a powerful tool in structural reliability analysis, in which accurate modeling of input random variables plays a crucial role. For practical quantities that are strictly positive and exhibit a minimum threshold, the three-parameter Birnbaum-Saunders distribution (BS(3P)) provides a particularly suitable probabilistic model. However, dedicated algorithms for generating random samples from this distribution are still limited, which restricts its application in reliability-based simulations. This paper presents the development of a random variate generation algorithm for the BS(3P) distribution based on an existing algorithm for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. The proposed algorithm is constructed using the inverse transformation method and is validated through a real-world case study involving the modeling of shotcrete thickness in the initial support system of a tunnel. An experimental dataset consisting of 1,546 measurements indicates that the BS(3P) distribution provides the best fit among a wide range of theoretical distributions. Monte Carlo simulations conducted with increasing sample sizes demonstrate that the proposed algorithm achieves high accuracy, with decreasing relative errors and clear convergence of distribution parameters and statistical moments toward their theoretical values. These results confirm the effectiveness and applicability of the proposed algorithm for reliability analysis based on Monte Carlo simulation.

Keywords: Three-parameter Birnbaum-Saunders; shotcrete thickness; Monte Carlo simulation; random number generator; fatigue life.

1. GIỚI THIỆU

Mô phỏng số Monte Carlo (MCS) là một phương pháp rất hiệu quả trong phân tích và đánh giá độ tin cậy các kết cấu công trình. Phương pháp MCS bao gồm việc tạo phát số các biến và các hàm ngẫu nhiên, phân tích thống kê các thể hiện đầu ra và kỹ thuật giảm sai. Thủ tục tính toán của MCS khá đơn giản theo trình tự: 1) Chọn một dạng phân phối cho biến ngẫu nhiên; 2) Phát ra một tập mẫu (tập thể hiện) từ phân phối; và 3) Sử dụng tập mẫu được tạo ra để tiến hành mô phỏng [1]. Như vậy, tạo phát mẫu ngẫu nhiên theo một phân phối (còn gọi là phát biến ngẫu nhiên hay mô hình hóa biến ngẫu nhiên) là một nhiệm vụ rất quan trọng trong thực hành tính toán bằng phương pháp MCS.

Các biến đầu vào của mô hình bài toán phân tích độ tin cậy kết cấu công trình nói chung đều là các biến ngẫu nhiên. Trong số đó, thường gặp các biến ngẫu nhiên có phân phối là các phân phối lý thuyết tương đối phổ biến như phân phối đều, phân phối chuẩn, phân phối loga-chuẩn, phân phối mũ, phân phối Weibull... Việc tạo ra một tập mẫu từ các phân phối này được dựa trên các thuật toán mô hình hóa các biến ngẫu nhiên được cung cấp từ các tài liệu chuyên khảo hoặc các nghiên cứu đi trước [2]. Trong một số môi trường tính toán, các quá trình mô hình hóa các biến ngẫu nhiên được lập sẵn thành các hàm trong thư viện, tạo nên sự thuận tiện cho người sử dụng. Chẳng hạn, để phát biến ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn, trong Matlab có hàm randn, trong R có hàm rnorm, trong Excel có hàm NORM.INV... Tuy nhiên, cũng có rất nhiều đại lượng vật lý hoặc hiện tượng tự nhiên tuân theo các luật phân phối không thông dụng, và do đó, chưa có thuật toán mô hình hóa phân phối đó. Trong những trường hợp như vậy, cần dựa trên các phân tích về toán học theo cách tiếp cận một trong các phương pháp cơ bản (phương pháp hàm ngược, phương pháp chống hàm, phương pháp chống biến, phương pháp chấp nhận - từ chối...) [2], hoặc dựa vào quan hệ đối với các phân phối phổ biến đã có sẵn các hàm gọi để xây dựng thuật toán mô hình hóa biến ngẫu nhiên [3].

Phân phối Birnbaum-Saunders (BS) hai tham số được Z. W. Birnbaum và S. C. Saunders giới thiệu năm 1969 [4]. Phân phối BS được xây dựng nhằm mô hình hóa thời gian đến khi hỏng của vật liệu chịu môi dưới tác động của các chu kỳ ứng suất ngẫu nhiên. Điểm đặc biệt là phân phối này không được xây dựng thuần túy từ yêu cầu toán học, mà từ một cơ chế vật lý cụ thể: sự tích lũy hư hỏng vì mô dẫn đến phá hủy. Nó còn được gọi là phân phối tuổi thọ mỏi (Fatigue Life - FL) và đã được ứng dụng rộng rãi trong các nghiên cứu về mỏi và độ tin cậy. Tuy nhiên, phạm vi ứng dụng của nó đã được mở rộng vượt ra ngoài bối cảnh ban đầu, với thuật ngữ "biến ngẫu nhiên tuổi thọ" được mở rộng để chỉ bất kỳ biến ngẫu nhiên liên tục dương nào. Phân phối BS hiện nay là một mô hình tự nhiên trong nhiều trường hợp mà sự tích lũy của một yếu tố nhất định buộc một đặc tính có thể định lượng vượt quá ngưỡng tới hạn, ở các lĩnh vực khác nhau (kỹ thuật, tài chính, y học, môi trường...) [3]. Nhờ nguồn gốc vật lý và cấu trúc linh hoạt, phân phối Birnbaum-Saunders đã thu hút sự quan tâm đáng kể trong hơn năm thập kỷ qua và dẫn đến sự hình thành của một họ phân phối Birnbaum-Saunders mở rộng. Nhiều biến thể đã được đề xuất nhằm tăng khả năng thích ứng của mô hình đối với các đặc trưng dữ liệu khác nhau, bao gồm các phiên bản tổng quát hóa [5], [6], các dạng lệch và đuôi dày [7], [8], [9], các mô hình hồi quy [10], [11], [12], cũng như các mở rộng đa biến để mô hình hóa sự phụ thuộc giữa nhiều thời gian tuổi thọ [13], [14], [15]. Tổng hợp các hướng nghiên cứu này đã góp phần hình thành một họ phân phối Birnbaum-Saunders phong phú, có nền tảng lý thuyết vững chắc và tính ứng dụng cao trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật [16].

Sự phát triển của biến thể ba tham số của phân phối Birnbaum-Saunders (tiếng Anh: Three-parameter Birnbaum-Saunders - ký hiệu là BS(3P)) là một bước tiến quan trọng để khắc phục hạn chế của mô hình hai tham số gốc. Trong khi phân phối hai tham số BS(2P) mặc định rằng sự phá hủy có thể xảy ra ngay từ thời điểm $t = 0$, biến thể ba tham số (tích hợp thêm tham số vị trí) cho phép tồn tại một "ngưỡng tuổi thọ" (threshold) - tức là khoảng thời gian an toàn mà vật liệu chắc chắn không bị hỏng. Nói một cách khác, phân phối BS(2P) có thể xem là một trường hợp riêng của phân phối BS(3P), khi tham số vị trí nhận giá trị bằng 0. Các nghiên cứu lý thuyết điển hình về BS(3P) có thể kể đến là của các tác giả Athayde và cộng sự [17], Shakil và cộng sự [18].

Các thuật toán tạo phát số ngẫu nhiên tuân theo phân phối Birnbaum-Saunders hai tham số đã được quan tâm nghiên cứu và được trình bày đầy đủ tại [3]. Tuy nhiên, thuật toán tạo phát số ngẫu nhiên tuân theo phân phối BS(3P) thì chưa có một tài liệu chính thức nào để cập đến. Điều này gây khó khăn về cơ sở lý thuyết cho quá trình nghiên cứu ứng dụng phương pháp MCS để giải quyết các bài toán độ tin cậy kết cấu công trình mà trong đó, có biến ngẫu nhiên đầu vào tuân theo luật phân phối BS(3P). Trong bài báo này sẽ trình bày quá trình phát triển một thuật toán phát biến ngẫu nhiên theo phân phối BS(3P) dựa trên thuật toán phát biến ngẫu nhiên theo phân phối BS(2P) đã có sẵn. Một trường hợp cụ thể về biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối BS(3P) biểu diễn chiều dày bê tông phun trong kết cấu chống đỡ ban đầu của đường hầm. Kết quả áp dụng thuật toán đề xuất để sinh ngẫu nhiên chiều dày bê tông phun cho thấy tính phù hợp và hiệu quả của thuật toán trong bài toán thực tế này.

2. VẬT LIỆU VÀ PHƯƠNG PHÁP

2.1. Phân phối Birnbaum-Saunders (Fatigue Life) hai tham số

Như đã đề cập ở trên, Phân phối Birnbaum-Saunders hai tham số, BS(2P), hay còn được gọi là Fatigue Life hai tham số, FL(2P), được xây dựng dựa trên hai giả thiết vật lý chính là vật liệu bị phá hoại khi xuất hiện vết nứt đầu tiên và sự phát triển của vết nứt theo từng chu kỳ. Trong mô hình gốc của Birnbaum và Saunders [4], giả thiết rằng mỗi lần gia tăng vết nứt là một biến ngẫu nhiên độc lập. Theo định lý giới hạn trung tâm, ảnh hưởng tổng hợp của các yếu tố ngẫu nhiên này sau nhiều chu kỳ có thể được xấp xỉ bằng một biến chuẩn tiêu chuẩn $Z \sim N(0,1)$. Khi đó, tuổi thọ mỏi X của vật liệu tuân theo phân phối Birnbaum - Saunders, ký hiệu là $X \sim BS(\alpha, \beta)$, với $\alpha > 0$, $\beta > 0$, trong đó α là tham số hình dạng (shape parameter), β là tham số tỷ lệ (scale parameter). Quan hệ giữa X và Z được mô tả bởi phương trình sau đây [3]:

$$X = \beta \left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right)^2 \quad (1)$$

Phân phối BS(2P) có ba đặc trưng quan trọng là chỉ nhận giá trị dương, có dạng lệch phải và có hàm mật độ xác suất đơn đỉnh (Hình 1) [3].

Hàm phân phối tích lũy (CDF) F_X , hàm mật độ xác suất (PDF) f_X của phân phối BS(2P) được biểu diễn theo phương trình (2) và (3):

$$F_X(x, \alpha, \beta) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right], x > 0 \quad (2)$$

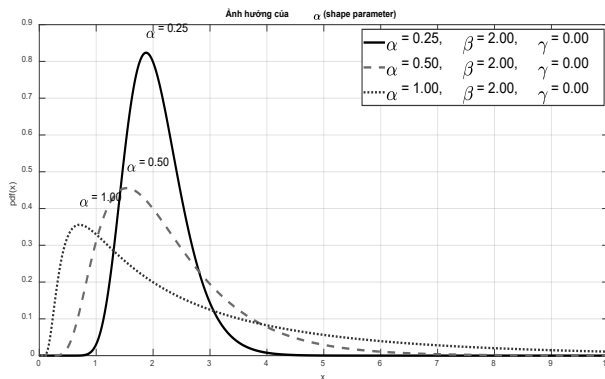
$$f_X(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\alpha x} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{x}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{x}} \right) \right], x > 0 \quad (3)$$

trong đó: $\Phi(\cdot)$ và $\phi(\cdot)$ tương ứng là CDF và là PDF của phân phối chuẩn tiêu chuẩn $N(0,1)$.

Các đặc trưng số của phân phối gồm giá trị trung bình $E[X]$ và phương sai $Var[X]$:

$$E[X] = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (4)$$

$$Var[X] = \frac{(\alpha\beta)^2}{2} \left(1 + \frac{5\alpha^2}{4} \right) \quad (5)$$



Hình 1. Ảnh hưởng của tham số α, β đến biểu đồ PDF của phân phối

2.2. Phân phối Birnbaum-Saunders (Fatigue Life) ba tham số

Trong nhiều bài toán thực tế, đại lượng cần mô tả luôn dương nhưng không nhất thiết bắt đầu từ 0, ví dụ như: thời gian hỏng sớm nhất của một cấu kiện, hoặc các biến đo lường có giá trị xuất phát lớn hơn một ngưỡng nhất định, chẳng hạn, chiều dày tối thiểu cho phép của lớp bê tông phun (như sẽ trình bày sau đây). Để mô tả linh hoạt hơn loại dữ liệu này, tham số vị trí (location parameter) λ được thêm vào mô hình BS hai tham số, qua đó hình thành phân phối BS ba tham số, BS(3P) [18].

Giả sử rằng biến ngẫu nhiên dương $X \sim BS(\alpha, \beta)$, trong đó $\alpha > 0, \beta > 0$ là các tham số của BS(2P). Xét biến ngẫu nhiên liên tục dương (Y) được định nghĩa bởi phép tịnh tiến:

$$Y = X + \lambda \quad (6)$$

trong đó tham số vị trí λ là một hằng số cho trước, luôn thỏa điều kiện $\lambda \geq 0$ để biểu diễn thời gian hoặc các đại lượng vật lý dương. Khi ấy, ta có biến ngẫu nhiên $Y \sim BS(\alpha, \beta, \lambda)$.

Vì $X > 0$, hiển nhiên phân phối của Y được xác định trên miền $Y > \lambda$. Khi $\lambda = 0$, phân phối trở về BS(2P).

Từ (1) và (6), quan hệ giữa $Y \sim BS(\alpha, \beta, \lambda)$ và $Z \sim N(0,1)$ có dạng phương trình (7):

$$Y = \beta \left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right)^2 + \lambda \quad (7)$$

Dựa trên định nghĩa (6) và CDF, PDF của $X \sim BS(2P)$ được biểu diễn theo phương trình (2) và (3), bằng phương pháp biến đổi trực tiếp biến ngẫu nhiên, nhận được CDF, PDF của $Y \sim BS(\alpha, \beta, \lambda)$ như sau:

$$F_Y(y, \alpha, \beta, \lambda) = \Phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{y-\lambda}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{y-\lambda}} \right) \right], y > \lambda \quad (8)$$

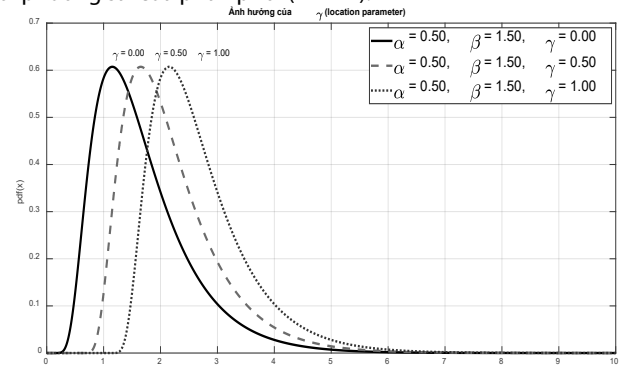
$$f_Y(y, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\sqrt{\frac{y-\lambda}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{y-\lambda}}}{2\alpha(y-\lambda)} \phi \left[\frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{y-\lambda}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{y-\lambda}} \right) \right], y > \lambda \quad (9)$$

Giá trị trung bình và phương sai:

$$E[Y] = \beta \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) + \lambda \quad (10)$$

$$Var[Y] = Var[X] = \frac{(\alpha\beta)^2}{2} \left(1 + \frac{5\alpha^2}{4} \right) \quad (11)$$

Tham số λ làm dịch chuyển giá trị trung bình nhưng không thay đổi phương sai của phân phối (Hình 2).



Hình 2. Ảnh hưởng của tham số λ đến biểu đồ PDF của phân phối

2.3. Xây dựng thuật toán phát biến ngẫu nhiên có phân phối Birnbaum-Saunders ba tham số

Từ lý thuyết về phân phối BS(2P) và BS(3P) nêu trên, có thể thấy rằng hoàn toàn có thể dựa trên các thuật toán phát biến ngẫu nhiên có phân phối BS(2P) để phát triển một thuật toán phát biến ngẫu nhiên có phân phối BS(3P).

Trong tài liệu chuyên khảo của Leiva [3] đã trình bày tổng hợp bốn thuật toán phát biến ngẫu nhiên theo phân phối BS(2P), có thể tóm tắt như sau:

- Thuật toán thứ nhất do Michael, Schucany và Haas đề xuất năm 1976, thường được gọi là phương pháp đa nghiệm (Multiple Root Method). Thuật toán này khai thác mối liên hệ giữa biến ngẫu nhiên T tuân theo phân phối BS và biến ngẫu nhiên V tuân theo phân phối Chi-bình phương (χ^2) với một bậc tự do. Quy trình thực hiện bao gồm việc giải một phương trình bậc hai để tìm hai nghiệm tiềm năng, sau đó sử dụng một biến ngẫu nhiên phân phối đều để chọn ngẫu nhiên một trong hai nghiệm đó làm giá trị mẫu cuối cùng.

- Thuật toán thứ hai được xây dựng dựa trên các nghiên cứu về phân phối log-Birnbaum-Saunders của Rieck và Nedelman (năm 1991). Các tác giả đã chứng minh rằng nếu một biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối BS, thì logarit của nó sẽ tuân theo phân phối log-BS, vốn có mối quan hệ mật thiết với phân phối chuẩn. Thuật

toán này thực hiện sinh một số ngẫu nhiên từ phân phối chuẩn tiêu chuẩn, tính toán giá trị trong không gian logarit, sau đó dùng hàm mũ để đưa về mẫu ngẫu nhiên BS mong muốn.

- Thuật toán thứ ba tận dụng tính chất hòa trộn (mixture) được đề xuất bởi Jorgensen và các cộng sự (năm 1991). Nhóm tác giả này đã chỉ ra rằng phân phối BS có thể được biểu diễn dưới dạng sự kết hợp của hai biến ngẫu nhiên Gaussian ngược (Inverse Gaussian - IG). Thuật toán tiến hành sinh hai giá trị từ hai phân phối Gaussian ngược khác nhau và sử dụng một phép thử Bernoulli với xác suất 0,5 để quyết định chọn giá trị nào. Cách tiếp cận này rất hữu ích khi người nghiên cứu đã có sẵn các trình phát mẫu Gaussian ngược hiệu quả.

- Thuật toán thứ tư do Leiva giới thiệu năm 2016 là phương pháp biến đổi ngược (Inverse Transform Method), dựa trên các tính chất hàm phân vị được thiết lập từ công trình gốc của Birnbaum và Saunders [4]. Đây được coi là phương pháp trực tiếp và hiệu quả nhất về mặt tính toán. Thay vì giải phương trình hay chọn mẫu trung gian, thuật toán này sử dụng một công thức tường minh để biến đổi trực tiếp một số ngẫu nhiên chuẩn chuẩn hóa thành mẫu BS. Trong môi trường mô phỏng hiện đại (như ngôn ngữ R hay Python), đây là thuật toán thường được ưu tiên sử dụng nhờ tốc độ xử lý vượt trội.

Thuật toán thứ tư sẽ được chọn làm cơ sở để xây dựng thuật toán phát biến ngẫu nhiên theo phân phối BS(3P) có nội dung như sau (Bảng 1):

Bảng 1. Thuật toán phát số ngẫu nhiên có phân phối BS(2P)

1. Đặt các giá trị tham số $\alpha > 0, \beta > 0$ cho $X \sim BS(\alpha, \beta)$.
2. Tạo một số ngẫu nhiên z từ $Z \sim N(0,1)$.
3. Tính một số ngẫu nhiên x cho $X \sim BS(\alpha, \beta)$ bằng cách sử dụng phương trình (1), theo đó

$$x = \beta \left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right)^2$$

4. Lặp lại các bước từ 1 đến 3 cho đến khi thu được đủ số mẫu ngẫu nhiên yêu cầu.

Từ lý thuyết về phân phối BS(3P) tại mục 2.2, phát triển thuật toán được trình bày trong bảng 1 để có thuật toán phát số ngẫu nhiên có phân phối BS(3P) như sau (Bảng 2):

Bảng 2. Thuật toán phát số ngẫu nhiên có phân phối BS(3P)

1. Đặt các giá trị tham số $\alpha > 0, \beta > 0$ và $\lambda > 0$ cho $Y \sim BS(\alpha, \beta, \lambda)$.
2. Tạo một số ngẫu nhiên z từ $Z \sim N(0,1)$.
3. Tính một số ngẫu nhiên x cho $X \sim BS(\alpha, \beta)$ bằng cách sử dụng phương trình (1), theo đó

$$x = \beta \left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1} \right)^2$$

4. Tính một số ngẫu nhiên y cho $Y \sim BS(\alpha, \beta, \lambda)$ bằng cách sử dụng phương trình (6), theo đó

$$y = x + \lambda$$

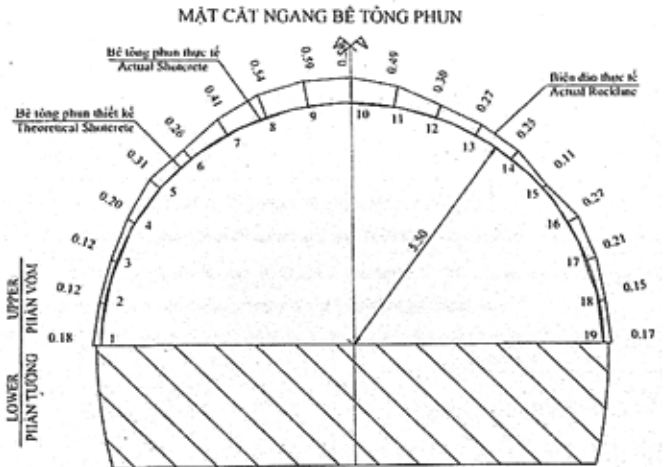
5. Lặp lại các bước từ 1 đến 4 cho đến khi thu được đủ số mẫu ngẫu nhiên yêu cầu.

2.4. Thu thập và xử lý dữ liệu chiều dày bê tông phun có phân phối BS(3P)

Bộ dữ liệu được thu thập từ hồ sơ lưu trữ của nhà thầu xây dựng công trình hầm đường bộ qua Đèo Cả [19]. Đây là dự án hầm lớn tại miền Trung Việt Nam, nối hai tỉnh Phú Yên (cũ) và Khánh Hòa, được khởi công xây dựng năm 2012 và đưa vào khai thác năm 2017. Chủ đầu tư là Công ty Cổ phần Đầu tư Đèo Cả; tư vấn thiết kế gồm Công

ty TNHH Nippon Koei (NK) và Công ty TNHH Nippon Koei Vietnam International (NKV). Liên danh các công ty Lũng Lô - VINAVICO - Quân Trung là nhà thầu chính thi công hạng mục hầm phía Bắc của hầm Đèo Cả thuộc Gói thầu 1A-2, có lý trình từ Km3+815 đến Km5+900 với chiều dài 2.085 m. Công trình hầm được thi công bằng công nghệ New Austrian Tunnelling Method (NATM), dựa trên các tiêu chuẩn thiết kế đường hầm của Việt Nam và Nhật Bản

Tổng cộng 1.546 giá trị chiều dày bê tông phun được thu thập, phản ánh độ biến thiên thực tế của lớp bê tông phun trong điều kiện địa chất phức tạp. Mặt cắt điển hình và các vị trí thu thập các số liệu chiều dày được minh họa tại Hình 3.



Hình 3. 19 vị trí được thu thập số liệu trên mặt cắt đường hầm [19]

Việc xử lý tập dữ liệu đã có được tiến hành như sau:

- Các mẫu được tổng hợp thành 19 tập con, mỗi tập tương ứng với một vị trí đo đạc trên mặt cắt hầm (Hình 3).

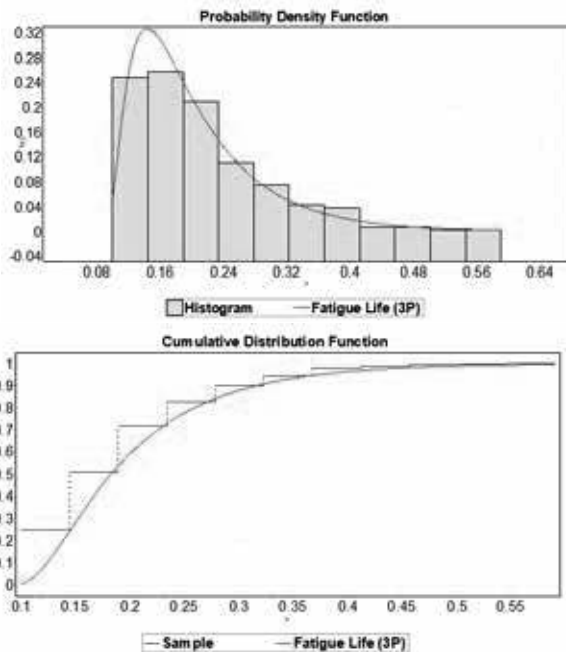
- Mỗi tập con được đưa vào phần mềm EasyFit 5.6 để đánh giá mức độ phù hợp với phân phối lý thuyết. Trong phần mềm, 65 phân phối lý thuyết được sử dụng để đánh giá thống kê và xếp hạng mức độ phù hợp của các tập dữ liệu thông qua ba kiểm định: Kolmogorov - Smirnov (K-S), Anderson - Darling (A-D) và Chi Square (χ^2).

- Để xác định phân phối phù hợp nhất thông qua ba phép kiểm định, thực hiện tính tổng điểm thứ hạng của mỗi phân phối đối với từng phép kiểm định. Phân phối có tổng điểm xếp hạng bé nhất là phân phối có mức độ phù hợp tốt nhất [20]. Kết quả tổng hợp từ 19 tập con cho thấy phân phối BS(3P) có tổng điểm thấp nhất trong số 65 phân phối được đánh giá chứng tỏ mức độ phù hợp tốt nhất của phân phối đối với dữ liệu.

- Sau khi xác định được phân phối phù hợp nhất, toàn bộ 1.546 giá trị chiều dày được gộp lại thành một tập duy nhất và tiến hành phân tích thống kê bằng EasyFit 5.6 với phân phối BS(3P). Kết quả, giá trị các tham số và đặc trưng thống kê được cho trong Bảng 3, biểu đồ CDF và PDF thực nghiệm được biểu diễn trên Hình 4. Trên hình ảnh trích xuất từ phần mềm EasyFit 5.6, tên gọi Fatigue Life và viết tắt FL(3P) được sử dụng thay cho Birnbaum-Saunders và BS(3P).

Bảng 3. Giá trị các tham số và đặc trưng thống kê của tập dữ liệu chiều dày bê tông phun theo phân phối BS(3P)

Tham số và đặc trưng thống kê	Giá trị
Tham số hình dạng α	0,65732
Tham số tỷ lệ β	0,10534
Tham số vị trí λ	0,077553
Giá trị trung bình (m)	0,20568
Phương sai (m ²)	0,00659



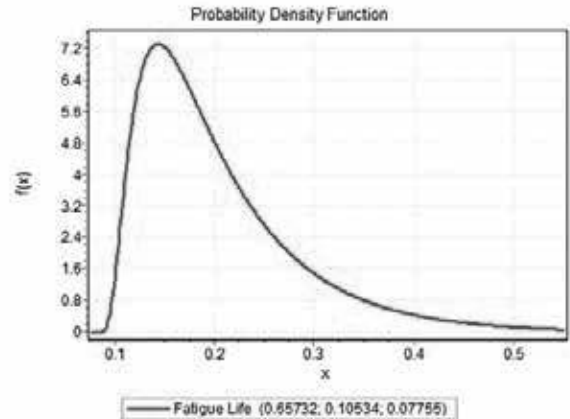
Hình 4. Biểu đồ PDF và CDF thực nghiệm của tập dữ liệu chiều dày bê tông phun

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Xác định đặc trưng thống kê phân phối lý thuyết

Từ các giá trị tham số của phân phối xấp xỉ trong Bảng 3 nhờ vào phần mềm EasyFit 5.6, tiến hành xác định đặc trưng thống kê phân phối lý thuyết của phân phối $BS(0,65732; 0,10534; 0,077553)$, nhận được giá trị trung bình $E[X] = 0,20565(m)$ và phương sai $Var[X] =$

$0,00738(m^2)$. Biểu đồ hàm mật độ xác suất lý thuyết được biểu diễn trên Hình 5.



Hình 5. Biểu đồ PDF phân phối $BS(0,65732; 0,10534; 0,077553)$

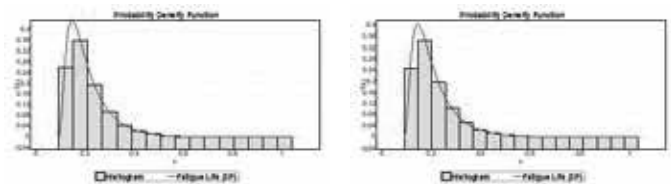
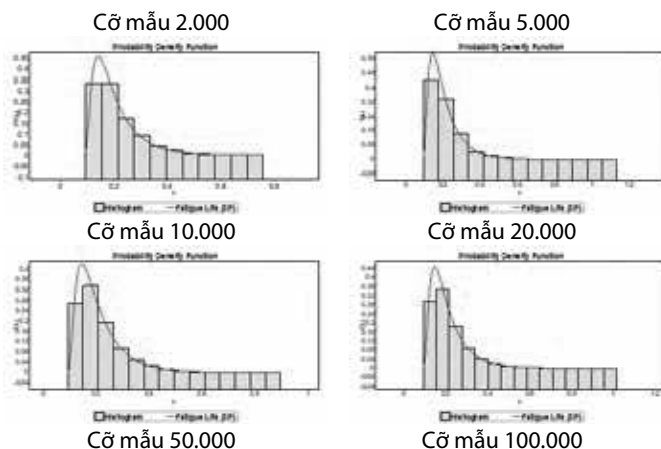
3.2. Phát biến ngẫu nhiên theo phân phối BS(3P)

Dựa trên thuật toán tại Bảng 2, một chương trình phát ngẫu nhiên Generator_BS3P được lập trên môi trường Matlab. Sau đó sử dụng chương trình để phát các tập mẫu ngẫu nhiên theo phân phối $BS(0,65732; 0,10534; 0,077553)$ với số lượng mẫu (cỡ mẫu) là 2.000, 5.000, 10.000, 20.000, 50.000 và 100.000.

Tiến hành xử lý thống kê các tập mẫu bằng phần mềm EasyFit 5.6 để nhận được giá trị của các tham số (hình dạng α , tỷ lệ β , vị trí λ), 2 đặc trưng thống kê (giá trị trung bình, phương sai). Kết quả được so sánh với các tham số và giá trị đặc trưng của phân phối lý thuyết (mục 3.1), thể hiện bằng % sai số và được trình bày trong Bảng 4. Biểu đồ tần suất thực nghiệm kết hợp đường cong mật độ xác suất lý thuyết được xấp xỉ (khớp) của các tập mẫu được trình bày trên Hình 6.

Bảng 4. Mô tả thống kê đối với 6 tập dữ liệu có cỡ mẫu tăng dần

Cỡ mẫu	Các tham số và đặc trưng thống kê									
	Tham số hình dạng α		Tham số tỷ lệ β		Tham số vị trí λ		Giá trị trung bình		Phương sai	
	Giá trị	Sai số %	Giá trị	Sai số %	Giá trị	Sai số %	Giá trị	Sai số %	Giá trị	Sai số %
2.000	0.67383	2,51	0.10092	4,20	0.07928	2,23	0.20313	1,22	0.00698	5,39
5.000	0.66675	1.43	0.10296	2.26	0.07857	1.31	0.20443	0.59	0.00753	2.05
10.000	0.66139	0.62	0.10483	0.48	0.07843	1.13	0.20621	0.27	0.00727	1.44
20.000	0.65939	0.31	0.10568	0.32	0.07722	0.43	0.20588	0.11	0.00746	1.05
50.000	0.65598	0.20	0.10584	0.47	0.07719	0.47	0.20580	0.07	0.00742	0.48
100.000	0.65806	0.11	0.10543	0.09	0.07751	0.06	0.20577	0.06	0.00740	0.30



Hình 6. Biểu đồ tần suất thực nghiệm kết hợp đường cong PDF lý thuyết các trường hợp phát mẫu ngẫu nhiên

3.3. Thảo luận

Kết quả mô phỏng phát biến ngẫu nhiên theo phân phối $BS(0,65732; 0,10534; 0,077553)$ cho thấy thuật toán đề xuất hoạt động ổn định và hiệu quả. Đối với các cỡ mẫu nhỏ (2.000 và 5.000), các tham số phân phối và đặc trưng thống kê thu được vẫn tồn tại sai số nhất định so với giá trị lý thuyết, đặc biệt là đối với phương sai và tham số hình dạng. Điều này là phù hợp với bản chất ngẫu nhiên của quá trình phát mẫu và quy luật hội tụ thống kê khi số lượng mẫu còn hạn chế.

Khi cỡ mẫu tăng dần từ 10.000 đến 100.000, các sai số tương đối của cả ba tham số (α , β , λ) cũng như giá trị trung bình và phương sai đều giảm nhanh và tiến dần về 0. Xu hướng này phản ánh rõ ràng tính hội tụ của thuật toán phát mẫu và phù hợp với định luật số lớn trong xác suất thống kê. Đặc biệt, với cỡ mẫu từ 20.000 trở lên, sai số của các đặc trưng thống kê đều nhỏ hơn 1%, cho thấy mức độ chính xác cao đủ để sử dụng trong các bài toán mô phỏng Monte Carlo trong thực hành kỹ thuật.

Ngoài ra, sự trùng khớp tốt giữa các biểu đồ mật độ xác suất thực nghiệm và đường cong lý thuyết chứng minh rằng thuật toán không chỉ tái hiện đúng các đặc trưng thống kê mà còn bảo toàn được hình dạng phân phối. Điều này khẳng định tính đúng đắn về mặt lý thuyết và tính khả thi về mặt tính toán của thuật toán phát biến ngẫu nhiên theo phân phối BS(3P).

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày một cách có hệ thống quá trình xây dựng và kiểm chứng thuật toán phát biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối Birnbaum-Saunders ba tham số, dựa trên thuật toán phát mẫu của phân phối hai tham số đã được thiết lập trước đó. Việc bổ sung tham số vị trí cho phép mô hình hóa hiệu quả các đại lượng thực tế có ngưỡng giá trị tối thiểu, khắc phục hạn chế của mô hình BS hai tham số.

Thông qua bộ dữ liệu thực nghiệm về chiều dày bê tông phun trong kết cấu chống đỡ ban đầu của đường hầm, phân phối BS(3P) đã được chứng minh là mô hình phù hợp nhất trong số nhiều phân phối lý thuyết được xem xét. Kết quả mô phỏng Monte Carlo với các cỡ mẫu khác nhau cho thấy thuật toán đề xuất có độ chính xác cao, khả năng hội tụ tốt và tái hiện đúng các tham số cũng như đặc trưng thống kê của phân phối lý thuyết.

Những kết quả đạt được không chỉ cung cấp một công cụ phát mẫu ngẫu nhiên hữu hiệu cho phân phối BS(3P), mà còn mở rộng khả năng ứng dụng của phương pháp mô phỏng Monte Carlo trong các bài toán phân tích độ tin cậy kết cấu công trình, đặc biệt đối với các đại lượng vật lý có bản chất ngưỡng và phân bố lệch phải.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Choi, S. K., Canfield, R. A., Grandhi, R. V., *Reliability-Based Structural Design*, Springer London, 2007.
- [2] Law, A. M., Kelton, W. D., *Simulation Modeling and Analysis*, Vol. 3, New York: McGraw-Hill, 2007.
- [3] Leiva, V., *The Birnbaum-Saunders Distribution*, Academic Press, 2015.
- [4] Birnbaum, Z. W., Saunders, S. C., *A New Family of Life Distributions*, Journal of Applied Probability, vol. 6(2), pp. 319-327, 1969.
- [5] Díaz-García, J. A., Leiva-Sánchez, V., *A New Family of Life Distributions Based on the Elliptically Contoured Distributions*, Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 128(2), pp. 445-457, 2005.
- [6] Vilca, F., Balakrishnan, N., Leiva, V., *Birnbaum-Saunders Distributions Based on Elliptical Distributions*, Journal of Statistical Planning and Inference, vol. 141(7), pp. 2301-2316, 2011.
- [7] Galea, M., Paula, G. A., Leiva, V., *Influence Diagnostics in Log-Birnbaum-Saunders Regression Models*, Journal of Applied Statistics, vol. 31(9), pp. 1049-1064, 2004.
- [8] Leiva, V., Barros, M., Paula, G. A., Sanhueza, A., *Generalized Birnbaum-Saunders Distributions Applied to Air Pollution Data*, Environmental and Ecological Statistics, vol. 17(2), pp. 241-257, 2010.
- [9] Leiva, V., Marchant, C., Ruggeri, F., Saulo, H., *A Criterion for Environmental Assessment Using Birnbaum-Saunders Distributions*, Environmetrics, vol. 26(7), pp. 463-476, 2015.
- [10] Rieck, J. R., Nedelman, J. R., *A Log-Linear Model for the Birnbaum-Saunders Distribution*, Technometrics, Vol. 33(1), pp. 51-60, 1991.
- [11] Santos-Neto, M., Cysneiros, F. J. A., Leiva, V., *On New Parameterizations of the Birnbaum-Saunders Distribution*, Statistical Modelling, vol. 12(2), pp. 151-169, 2012.

- [12] Leiva, V., Santos-Neto, M., Cysneiros, F. J. A., Barros, M., *Birnbaum-Saunders Statistical Modelling: A New Approach*, Statistical Modelling, vol. 14(1), pp. 21-48, 2014.
- [13] Kundu, D., Balakrishnan, N., Jamalizadeh, A., *Generalized Multivariate Birnbaum-Saunders Distributions*, Journal of Multivariate Analysis, vol. 101(5), pp. 1132-1148, 2010.
- [14] Kundu, D., Balakrishnan, N., Jamalizadeh, A., *Generalized Multivariate Birnbaum-Saunders Distributions and Related Inferential Issues*, Journal of Multivariate Analysis, vol. 116, pp. 230-244, 2013.
- [15] Aykroyd, R. G., Leiva, V., Marchant, C., *Multivariate Birnbaum-Saunders Distributions: Modelling and Applications*, Risks, vol. 6(1), Article 21, 2018.
- [16] Balakrishnan, N., Kundu, D., *Birnbaum-Saunders Distribution: A Review of Models, Analysis, and Applications*, Applied Stochastic Models in Business and Industry, vol. 35(1), pp. 4-49, 2019.
- [17] Athayde, E., Azevedo, C., Leiva, V., Sanhueza, A., *About Birnbaum - Saunders Distributions Based on the Johnson System*, Communications in Statistics - Theory and Methods, vol. 41(11), pp. 2061-2079, 2012.
- [18] Shakil, M., et al., *Some Inferences on Three-Parameter Birnbaum - Saunders Distribution: Statistical Properties, Characterizations and Applications*, Computational Journal of Mathematical and Statistical Sciences, vol. 2(2), pp. 197-222, 2023.
- [19] Deo Ca Investment Joint Stock Company, *Detailed Design Report for the Northern Tunnel of Deo Ca Tunnel - East Tunnel*, Quality Document, 2015.
- [20] Basaligheh, F., Keyhani, A., *Distribution Function of Random Variable of Shotcrete Lining Thickness in Temporary Tunnel Support*, Journal of Rock Mechanics, vol. 1(1), pp. 55-67, 2017.